Clase 17

Capacitancia y Dieléctricos

Susceptibilidad eléctrica

En los materiales dieléctricos cuando el campo eléctrico no es demasiado intenso, podemos describir la polarización como un efecto lineal en el campo. Introducimos la constante susceptibilidad eléctrica χ del material por la relación,

$$\vec{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \chi \vec{\mathbf{E}}.$$

Esta es una relación fenomenológica aplicable al conjunto de materiales con respuesta lineal en situaciones con campos eléctricos moderados. Existen por un lado materiales que no tienen una respuesta isotrópica a la presencia del campo mientras que por el otro para campos suficientemente intensos aparecen términos no lineales para la mayoría de los materiales Vemos como podemos encontrar la relación entre la constante dieléctrica K y la constante de susceptibilidad dieléctrica χ explotando la expresión de la carga inducida σ_i en términos del vector de polarización en un capacitor de placas paralelas.Tenemos las igualdades,

$$\sigma_i = P = \sigma(1 - \frac{1}{K}) = \epsilon_0 \chi E = \chi \frac{\sigma}{K}$$

De donde

$$K = 1 + \chi$$

Ejemplo 50: Calculemos el vector polarización dentro de un capacitor de placas paralelas con carga Q y dieléctrico de constante K .

El vector polarización dentro viene dado por $\vec{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \chi \vec{\mathbf{E}}$. Como el campo eléctrico dentro del material es uniforme y vale $E = \frac{Q}{A\epsilon_0 K}$, el vector polarización es entonces constante, tiene la dirección del campo y vale

$$P = \epsilon_0 \frac{\chi Q}{A\epsilon_0 K} = \frac{K-1}{K}\frac{Q}{A} = \frac{K-1}{K}\sigma$$

Como el vector polarización es constante también lo podemos obtener por su valor en la superficie que sabemos es $P = \sigma_i = \frac{K-1}{K}\sigma$.

El vector desplazamiento

Suele introducirse también el vector desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}$ según la relación

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}} = \epsilon_0 K \vec{\mathbf{E}}.$$

En términos de $\vec{\mathbf{D}}$ la ley de Gauss con materiales dieléctricos queda,

$$\int_S \vec{\mathbf{D}}.\vec{\mathbf{dS}} = q.$$

donde q es la carga libre encerrada por la superficie S.

Densidad de energía de un capacitor

Las expresiones de la energía electrostática obtenidas hasta ahora nos dan una medida de la energía total de la configuración, sea ésta una distribución de cargas o un capacitor. Analizando la expresión de la energía en un capacitor de placas paralelas podemos encontrar una relación que nos describe la distribución espacial de ésta energía, es decir la densidad de energía electrostática en el espacio. Tomemos un capacitor de placas paralelas con área A y separación d. Entre las placas el campo eléctrico tiene módulo $E = Q/(A\epsilon_0)$ y la capacitancia vale $C = (A\epsilon_0)/d$. La energía según vimos la clase pasada es $E_E = Q^2/(2C)$. Sustituyendo las expresiones anteriores encontramos

$$U_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 A d E^2 \quad \rightarrow \quad u_E = \frac{U_E}{Ad} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

donde usando que Ad es el volumen de la región entre las placas (donde el campo eléctrico es no nulo) definimos la densidad de energía por unidad de volumen u_E. Esta relación entre la densidad de energía y el campo eléctrico aunque deducida para este caso particular tiene validez general.

Energía y trabajo en capacitores con dieléctricos

La energía almacenada en un capacitor de placas paralelas con dieléctrico con carga Q es según el argumento general ya discutido

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{dQ^2}{2KA\epsilon_0} \ .$$

Teniendo en cuenta que el campo eléctrico entre las placas es uniforme y vale $E = Q/(K\epsilon_0 A)$ este valor implica que la densidad de energía en presencia de dieléctricos viene dada por

$$u_E = \frac{K\epsilon_0 E^2}{2} = \epsilon E^2 2 = \frac{Q^2}{2KA^2\epsilon_0} \ .$$

El factor K adicional toma en cuenta la presencia de la carga inducida en las placas.

Si queremos retirar el dieléctrico del capacitor en forma cuasiestática debemos realizar trabajo para compensar la atracción que las cargas en las placas del capacitor ejercen sobre las cargas inducidas en el dieléctrico. Este trabajo es igual a la diferencia de energía electrostática entre las configuraciones inicial y final. Por lo tanto

$$W^{externo} = U_E^{final} - U_E^{inicial} = \frac{Q^2}{2C_0}(1 - \frac{1}{K}) \ .$$

Como realizamos trabajo positivo sobre el sistema, la energía en la situación final es mayor que en la configuración inicial.